

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/275621901>

Tension of a Wide Plate Containing a Row of Elliptical Inclusions.

Article in *Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, A Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A* · January 1995

DOI: 10.1299/kikaia.61.106

CITATION

1

READS

40

3 authors, including:



Nao-Aki Noda

Kyushu Institute of Technology

695 PUBLICATIONS 3,769 CITATIONS

SEE PROFILE

任意個の一系列だ円形介在物をもつ板の引張り*

野田 尚昭*¹, 松尾 忠利*², 石井 秀雄*³

Tension of a Wide Plate Containing a Row of Elliptical Inclusions

Nao-Aki NODA, Tadatoshi MATSUO and Hideo ISHII

This paper deals with a row of equally spaced equal elliptical inclusions in a plate subjected to transverse and longitudinal tensions. Based on the concepts of the body force method, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the densities of body forces distributed in an infinite plate having the same elastic constants of the matrix and inclusions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight kinds of fundamental density function proposed in our previous paper are used; then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. In the analysis, elastic constants of matrix and inclusion are varied systematically; then, the magnitude and position of the maximum stress are examined. For any fixed shape, size and elastic constant of inclusions, the maximum stress is shown to be linear with the reciprocal of the number of inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Inclusion

1. 緒 言

2 種以上の異なる材料からなる複合材料の解析では、弾性係数の評価および、母材と介在物境界における応力集中あるいは界面の応力の解析などが主として問題となる。介在物が複数個存在する場合は、その干渉効果により最大応力の発生位置と大きさは介在物の大きさと位置および母材と介在物の弾性比により微妙に変化する。そのため正確な解析には母材と介在物の境界上のなめらかな応力分布を求める必要がある。著者らはこれまでに体積法を用いた応力集中問題の解析において、特異積分方程式を厳密に解析する方法を提案した^{(1)~(4)}。また、前報において、本解析方法を介在物の干渉問題に適用しその有効性を確かめた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

本研究では無限板中の任意個の一系列だ円形介在物の干渉問題の解析を行う。最近石田らはローラン展開法⁽⁷⁾を用いて任意個の一系列だ円孔をもつ無限板の解析を行っているが、任意個の一系列だ円形介在物を研究

した解析はこれまでに見当たらない。解析には体積法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を用いる。この方法を用いれば、未知関数が連続関数として近似されるために、境界上の任意の点の応力を少ない計算時間で正確に求めることができる。介在物間の距離および、母材と介在物の弾性比を変化させて干渉効果を系統的に調べる。

2. 任意個の一系列だ円形介在物の干渉問題の解析法

本解析方法を図 1 に示すような、遠方で一様な x 方向の引張応力 σ_x^∞ , y 方向の引張応力 σ_y^∞ が作用してい

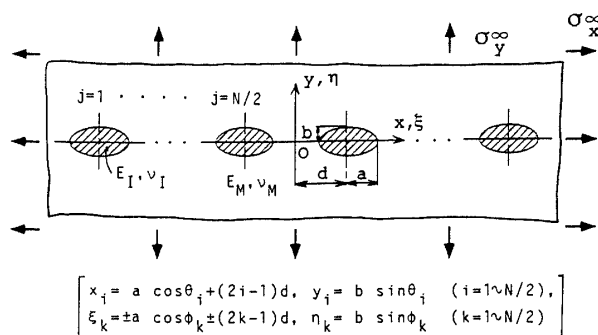


図 1 無限板中の任意個の一系列だ円形介在物

* 平成 6 年 3 月 17 日 九州支部第 47 期総会講演会, 平成 6 年 3 月 31 日 第 71 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成 6 年 5 月 27 日.

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1).

*² 正員, 九州工業大学大学院.

*³ 准員, 日通工(株) (〒213 川崎市高津区北見方 260).

る無限板中の大きさの等しい N 個 (N は偶数) の一系列だ円形介在物の干渉問題を例にとつて説明する。介在物の個数が奇数個の場合も同様に解析できる。この問題は重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、問題の対称性から、無限板中の 2 点 $[\xi = \pm(d + a \cos \phi_k), \eta = b \sin \phi_k]$ に集中力が働くときの任意の点 $(x = d + a \cos \theta_i, y = b \sin \theta_i)$ の応力場の解 ($K_{nn}^{Fx}, K_{nn}^{Fy}, K_{nl}^{Fx}, K_{nl}^{Fy}$) と変位の解 ($K_{uu}^{Fx}, K_{uu}^{Fy}, K_{vl}^{Fx}, K_{vl}^{Fy}$) を用いて解くことができる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数をもつ無限板 (無限板 M と無限板 I) 中の仮想境界上に分布させた x, y 方向の、境界に沿った長さ当たりの体積力密度 $\rho_{xM}^*(\phi_k), \rho_{yM}^*(\phi_k)$ および $\rho_{xI}^*(\phi_k), \rho_{yI}^*(\phi_k)$ を未知関数とする特異積分方程式 (1), (2) で表現される [ϕ_k は着力点 (ξ, η) を表す角度で注目点 θ_i と区別して用いる]。

$$\begin{aligned} & -(1/2)\{\rho_{xM}^*(\theta_i) \cos \theta_{io} + \rho_{yM}^*(\theta_i) \sin \theta_{io}\} + (1/2)\{\rho_{xI}^*(\theta_i) \cos \theta_{io} + \rho_{yI}^*(\theta_i) \sin \theta_{io}\} \\ & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^*(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^*(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^*(\phi_k) ds \\ & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^*(\phi_k) ds = -(\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_{io} + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_{io}) \\ & -(1/2)\{-\rho_{xM}^*(\theta_i) \sin \theta_{io} + \rho_{yM}^*(\theta_i) \cos \theta_{io}\} + (1/2)\{-\rho_{xI}^*(\theta_i) \sin \theta_{io} + \rho_{yI}^*(\theta_i) \cos \theta_{io}\} \\ & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nlM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^*(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nlM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^*(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nlI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^*(\phi_k) ds \\ & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{nlI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^*(\phi_k) ds = -(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta_{io} \cos \theta_{io}, i=1 \sim N/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^*(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^*(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^*(\phi_k) ds \\ & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^*(\phi_k) ds = -(\sigma_x^\infty - \nu_M \sigma_y^\infty) x / E_M \\ & \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^*(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^*(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^*(\phi_k) ds \\ & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^*(\phi_k) ds = -(\sigma_y^\infty - \nu_M \sigma_x^\infty) y / E_M, i=1 \sim N/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$-d\xi = a \sin \phi_k d\phi_k, d\eta = b \cos \phi_k d\phi_k, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi_k + b^2 \cos^2 \phi_k} d\phi_k \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。また、 θ_{io} は点 (x, y) におけるだ円の外向き法線と x 軸のなす角度である。 $\sum_{k=1}^{N/2}$ は N 個のだ円形介在物となるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する。

無限板 M のだ円孔となるべき境界上に生じる法線方向の垂直応力を σ_{nM} 、せん断応力を τ_{nlM} 、 x 方向変位を U_M 、 y 方向変位を V_M とし、無限板 I のだ円形介在物となるべき境界上に生じる法線方向の垂直応力 σ_{nI} 、せん断応力を τ_{nlI} 、 x 方向変位を U_I 、 y 方向変位を V_I とすると、式 (1), (2) は母材と介在物の接合境界面上における境界条件 $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0$, $\tau_{nlM} - \tau_{nlI} = 0$, $U_M - U_I = 0$, $V_M - V_I = 0$ に相当している。式 (1) の第 1 項と第 2 項は、体積力を無限小近傍からなる境界上⁽⁹⁾ に作用させたとき、境界条件を満たすべき境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nnM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$ を例にとると、これは、無限板 M の仮想境界上の y 軸に対称な 2 点に x 方向の集中力が y 軸に対称に作用するとき境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_n を意味す

る。 $K_{uM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$ 等の計算では、介在物の外部領域のある点(参考点)に対する相対変位を用いた⁽⁸⁾。 $i=k$ のとき、式 (1) はコーシー形⁽⁸⁾、式 (2) は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\theta_i = \phi_k$ の場合には、式 (1) は積分のコーシーの主値を取るものとする。

x 方向の体積力について 4 種類の基本密度関数 $w_{x1}(\phi_k), \dots, w_{x4}(\phi_k)$ および y 方向について 4 種類の体積力の基本密度関数 $w_{y1}(\phi_k), \dots, w_{y4}(\phi_k)$ を定義する。本解析法では、未知関数 $\rho_{xM}^*(\phi_k), \rho_{yM}^*(\phi_k)$ および $\rho_{xI}^*(\phi_k), \rho_{yI}^*(\phi_k)$ をこれらの基本密度関数と $0 \leq \phi_k \leq \pi/2$ で定義され、 $\phi_k = 0$ と $\pi/2$ に対称な重み関数 $\rho_{x1}(\phi_k), \dots, \rho_{y4}(\phi_k)$ の組合せによって表現する。一般に、応力や変位は $\phi_k = 0, \pi/2$ で対称とはならないが、このような表現により、新たな未知関数となる重み関数 $\rho_{x1}(\phi_k), \dots, \rho_{y4}(\phi_k)$ は $\phi_k = 0, \pi/2$ について対称な関数となる。この問題の x 軸に関する対称性より、基本密度関数として $w_{x1}(\phi_k), w_{x3}(\phi_k), w_{y2}(\phi_k), w_{y4}(\phi_k)$ を採用すれば、未知関数は次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 \rho_{xM}^*(\phi_k) &= \rho_{x1M}(\phi_k)w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x3M}(\phi_k)w_{x3}(\phi_k) \\
 \rho_{yM}^*(\phi_k) &= \rho_{y2M}(\phi_k)w_{y2}(\phi_k) + \rho_{y4M}(\phi_k)w_{y4}(\phi_k) \\
 \rho_{xI}^*(\phi_k) &= \rho_{x1I}(\phi_k)w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x3I}(\phi_k)w_{x3}(\phi_k) \\
 \rho_{yI}^*(\phi_k) &= \rho_{y2I}(\phi_k)w_{y2}(\phi_k) + \rho_{y4I}(\phi_k)w_{y4}(\phi_k) \\
 (k=1 \sim N/2) \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

本研究では、未知関数を連続関数として近似するため
に次のような表現を用いる、

$$\begin{aligned}
 \rho_{x1M}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_{nM} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{x3M}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_{nM} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{y2M}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_{nM} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{y4M}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_{nM} t_n(\phi_k)
 \end{aligned}$$

表 1 境界に沿った応力の収束性

($N=5, a/b=1, a/d=0.6, \sigma_x^*=1, \sigma_y^*=0, E_I/E_M=0.5$)

θ	M	σ_{tM}	σ_{tI}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{ntM}	τ_{ntI}
0	8	-0.06161	-0.03078	0.63279	0.63255	-0.00054	-0.00054
	12	-0.06149	-0.03074	0.63276	0.63275	-0.00054	-0.00054
	16	-0.06149	-0.03074	0.63276	0.63276	-0.00054	-0.00054
40	8	0.46051	0.23037	0.38317	0.38314	-0.34213	-0.34198
	12	0.46052	0.23026	0.38322	0.38322	-0.34208	-0.34209
	16	0.46052	0.23026	0.38322	0.38322	-0.34208	-0.34208
80	8	1.30219	0.65115	-0.02871	-0.02869	-0.12784	-0.12783
	12	1.30218	0.65109	-0.02868	-0.02869	-0.12789	-0.12789
	16	1.30218	0.65109	-0.02868	-0.02868	-0.12789	-0.12789
90	8	1.35001	0.67498	-0.05228	-0.05214	0.00065	0.00065
	12	1.34997	0.67498	-0.05223	-0.05223	0.00065	0.00065
	16	1.34996	0.67498	-0.05223	-0.05223	0.00065	0.00065
100	8	1.30219	0.65115	-0.02871	-0.02869	0.12784	0.12783
	12	1.30218	0.65109	-0.02868	-0.02869	0.12789	0.12789
	16	1.30218	0.65109	-0.02868	-0.02868	0.12789	0.12789
140	8	0.46051	0.23037	0.38317	0.38314	0.34213	0.34198
	12	0.46052	0.23026	0.38322	0.38322	0.34208	0.34209
	16	0.46052	0.23026	0.38322	0.38322	0.34208	0.34208
180	8	-0.06161	-0.03078	0.63280	0.63255	0.00054	0.00054
	12	-0.06149	-0.03074	0.63276	0.63275	0.00054	0.00054
	16	-0.06149	-0.03074	0.63276	0.63276	0.00054	0.00054

$$\begin{aligned}
 \rho_{x1I}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_{nI} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{x3I}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_{nI} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{y2I}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_{nI} t_n(\phi_k) \\
 \rho_{y4I}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_{nI} t_n(\phi_k)
 \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots (5)$

$$t_n(\phi_k) = \cos \{2(n-1)\phi_k\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで M は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲の選点数である。以上の

表 2 境界条件の満足度

($N=5, a/b=1, a/d=0.6, \sigma_x^*=1, \sigma_y^*=0, E_I/E_M=0.5$)

θ	M	$\sigma_{nM}-\sigma_{nI}$	$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}$	u_M-u_I	v_M-v_I
0	8	2.45E-04	-4.21E-07	2.51E-04	-1.04E-07
	12	3.65E-05	-6.28E-09	2.35E-06	-9.65E-10
	16	5.04E-08	-8.63E-11	2.32E-08	-3.52E-12
40	8	2.73E-05	-1.44E-04	1.23E-04	-4.90E-05
	12	-2.72E-07	1.42E-06	-7.54E-07	2.99E-07
	16	1.32E-09	-6.79E-09	2.46E-09	-9.05E-10
80	8	2.38E-05	-8.78E-06	5.17E-06	-1.39E-05
	12	1.05E-06	3.87E-07	-1.40E-07	3.78E-07
	16	2.72E-08	1.01E-08	-2.47E-09	6.20E-09
90	8	-1.44E-04	2.55E-07	-1.48E-07	-8.04E-05
	12	-2.20E-06	3.91E-09	-1.39E-09	-7.60E-07
	16	-3.05E-08	5.42E-11	-1.40E-11	-6.63E-09
100	8	-2.38E-05	8.78E-06	-5.17E-06	-1.39E-05
	12	1.05E-06	-3.87E-07	1.40E-07	3.78E-07
	16	2.72E-08	-1.01E-08	2.47E-09	6.20E-09
140	8	2.73E-05	1.44E-04	-1.23E-04	-4.90E-05
	12	-2.72E-07	-1.42E-06	7.54E-07	2.99E-07
	16	1.32E-09	6.79E-09	-2.46E-09	-9.05E-10
180	8	2.45E-04	4.21E-07	-2.51E-04	-1.04E-07
	12	3.65E-06	6.28E-09	-2.35E-06	-9.65E-10
	16	5.04E-08	8.63E-11	-2.32E-08	-3.52E-12

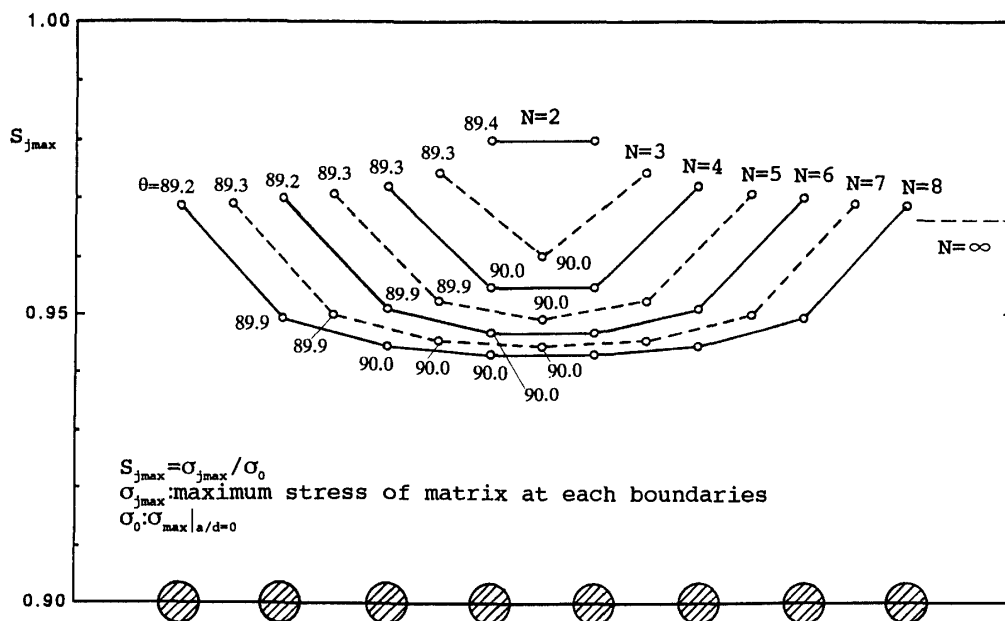


図 2 一系列円形介在物を有する無限板の母材の S_{jmax} の N, j による変動
(図の実線と破線は、各介在物の最大応力を直線で結んだもの)
($a/b=1, a/d=0.4, \sigma_x^*=1, \sigma_y^*=0, E_I/E_M=0.5$)

離散化の方法により式(1), (2)の特異積分方程式は, $4M * N/2$ 元の連立方程式に還元される. なお, この離散化の方法の詳細については前報⁽⁵⁾に示している.

任意の点の応力は係数 a_{nM} , b_{nM} , c_{nM} , d_{nM} , a_{nI} , b_{nI} , c_{nI} , d_{nI} と影響係数の一次結合で表現される. 以上の解析法により任意個のだ円形介在物の干渉効果を介在物の個数, 形状比と弾性比を系統的に変化させて

解析する.

3. 解析結果および考察

以下では $\nu_M = \nu_I = 0.3$ で平面ひずみとして解析を行った.

図1の無限板中の任意個の一系列だ円形介在物の干渉問題において, 介在物の個数 $N=5$ の形状比が $a/b =$

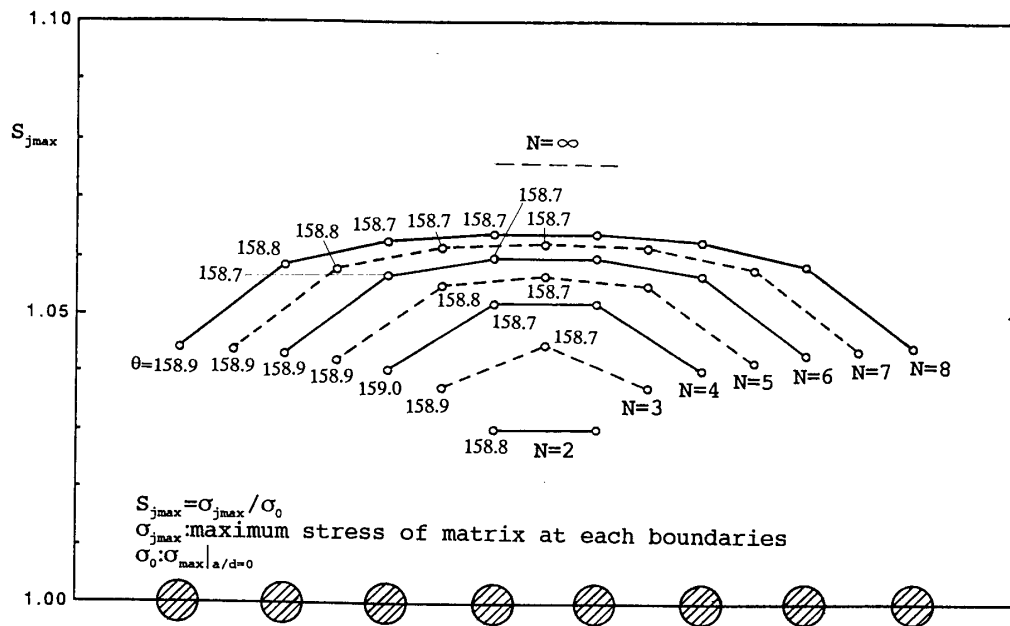


図3 一系列円形介在物を有する無限板の母材の S_{jmax} の N, j による変動
(図の実線と破線は各介在物の最大応力を直線で結んだもの)
($a/b=1$, $a/d=0.4$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$, $E_I/E_M=2.0$)

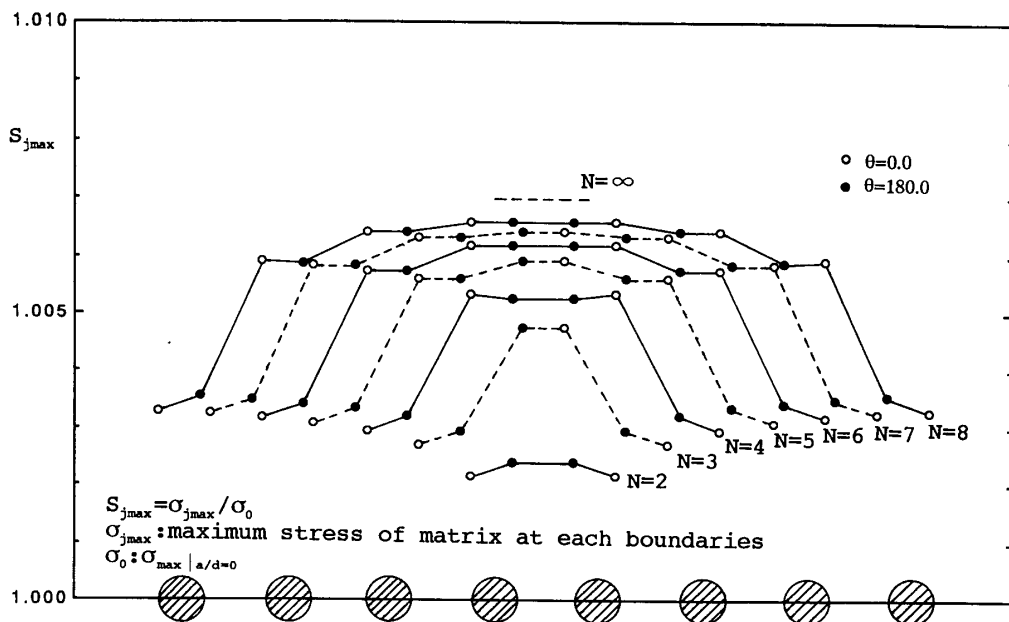
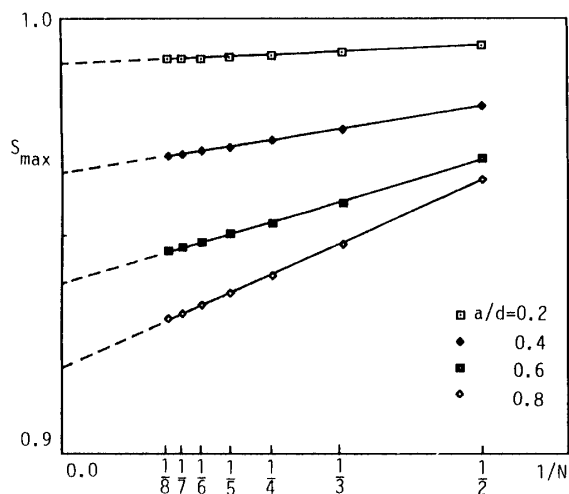
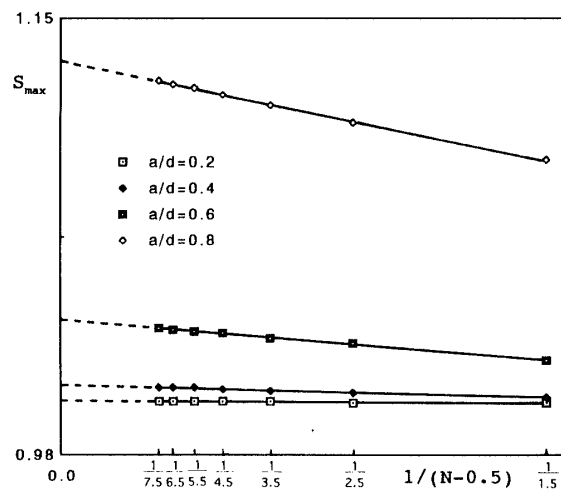


図4 一系列円形介在物を有する無限板の母材の S_{jmax} の N, j による変動
(図の実線と破線は各介在物の最大応力を直線で結んだもの)
($a/b=1$, $a/d=0.4$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$)

表 3 一系列円形介在物を有する無限板の母材の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ ($\sigma_0 = \sigma_{\max}|_{a/d=0}$, $a/b=1$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

E _I /E _M	a/d	0.0		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
	N	(deg.)	σ_0	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$
0.0	2	90.0	3.000	90.0	1.000	89.7	0.976	88.0	0.926	85.9	0.890	84.2	0.874
	3	90.0	(3.000)	90.0	(1.000)	89.6	(0.976)	87.7	(0.926)	85.6	(0.890)	84.2	(0.874)
	4	90.0	3.000	90.0	1.000	89.6	0.970	87.7	0.911	85.6	0.869	84.2	0.849
	5	90.0	(3.000)	90.0	(1.000)	89.6	(0.967)	87.7	(0.904)	85.4	(0.859)	84.1	(0.837)
	6	90.0	3.000	90.0	1.000	89.6	0.966	87.7	0.900	85.4	0.853	84.0	0.830
	7	90.0	(3.000)	90.0	(1.000)	89.6	(0.965)	87.7	(0.897)	85.4	(0.850)	83.9	(0.822)
	8	90.0	3.000	90.0	1.000	89.6	0.964	87.7	0.895	85.4	0.845	83.9	0.820
	∞		3.000		1.000		0.961		0.885		0.831		0.806
			(3.000)		(1.000)		(0.961)		(0.886)		(0.832)		(0.806)
0.5	2	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.994	89.4	0.980	88.6	0.968	88.2	0.964
	3	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.992	89.3	0.975	88.4	0.958	87.7	0.948
	4	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.992	89.3	0.972	88.3	0.953	87.6	0.941
	5	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.991	89.3	0.971	88.3	0.951	87.5	0.937
	6	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.991	89.3	0.970	88.3	0.949	87.5	0.934
	7	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.991	89.3	0.969	88.3	0.948	87.5	0.932
	8	90.0	1.506	90.0	1.000	89.9	0.991	89.3	0.969	88.3	0.947	87.5	0.931
	∞		1.506		1.000		0.990		0.966		0.940		0.921
2.0	2	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.006	158.8	1.030	163.6	1.081	180.0	1.183
	3	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.011	158.7	1.045	163.6	1.110	180.0	1.232
	4	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.012	158.7	1.052	163.8	1.130	180.0	1.276
	5	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.013	158.7	1.057	163.8	1.141	180.0	1.298
	6	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.014	158.7	1.060	163.8	1.149	180.0	1.318
	7	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.015	158.7	1.062	163.8	1.155	180.0	1.330
	8	22.4, 157.6	1.215	22.4, 157.6	1.000	157.7	1.015	158.7	1.064	163.8	1.160	180.0	1.341
	∞		1.215		1.000		1.018		1.076		1.19		1.41
∞	2	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.4	1.017	160.3	1.083	166.3	1.602	180.0	1.737
	3	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.028	160.0	1.122	166.3	1.628	180.0	1.940
	4	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.032	160.0	1.144	166.3	1.654	180.0	2.165
	5	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.035	160.0	1.159	166.3	1.662	180.0	2.294
	6	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.037	160.0	1.169	166.3	1.667	180.0	2.430
	7	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.039	160.0	1.179	166.3	1.673	180.0	2.519
	8	21.8, 158.2	1.549	21.8, 158.2	1.000	158.3	1.040	160.0	1.182	166.3	1.677	180.0	2.610
	∞		1.549		1.000		1.047		1.221		1.70		3.2

() : Isida and Igawa [7]

図 5 母材の $S_{\max}$ と $1/N$ の関係
($a/b=1$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$, $E_I/E_M=0.5$)図 6 母材の $S_{\max}$ と $1/(N-0.5)$ の関係
($a/b=1$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$)

1, $a/d=0.6$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$, $E_I/E_M=0.5$ の場合の最大応力が生じる介在物(最も外側の介在物)の境界縁に沿った応力 σ_{nM} , σ_{tM} , τ_{nM} , σ_{nI} , σ_{tI} , τ_{nI} の収束状況を表 1 に示す。ここで、 σ_n は境界上の法線方向の垂直応力、 σ_t は接線方向の垂直応力、 τ_{nt} はせん断応力を表

し、添字 M と I はそれぞれ、母材と介在物を表している。本解析結果は、 $M=12$ 程度で有効数字 5 けた程度まで収束して良好な収束性を示している。さらに境界条件($\sigma_{nM}-\sigma_{nI}=0$, $\tau_{nM}-\tau_{nI}=0$, $U_M-U_I=0$, $V_M-V_I=0$)の満足度を確認するために、表 1 で応力の収

束性を調べた点におけるそれらの値を表2に示す。境界上で零であるべき $\sigma_{NM}-\sigma_{NI}$ 等の値は境界全周で $M=12$ 程度でも 10^{-5} 程度であり高い境界条件の満足度が確かめられた。

次に図2, 3は介在物の個数 $N=2\sim 8$ に対し $\sigma_x^\infty=1$,

$\sigma_y^\infty=0$, $E_I/E_M=0.5, 2.0$ のときの母材に生じる最大応力(主応力)の値を示した図である。ここで図2, 3の縦軸は各介在物境界での母材の主応力の最大値 σ_{jmax} を無限板中の一つの円形介在物の応力集中係数 σ_0 で無次元化した $S_{jmax}=\sigma_{jmax}/\sigma_0$ をとっている。 $E_I/E_M<$

表4 一系列円形介在物を有する無限板の介在物の $S_{max}=\sigma_{max}/\sigma_0$ ($\sigma_0=\sigma_{max}|_{a/d=0}$, $a/b=1$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

E _I /E _M	a/d	0.0		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
	N	(deg.)	σ_0	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}
0.5	2	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.995	0.0	0.983	60.6	0.969	86.8	0.960
	3	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.993	0.0	0.978	0.0	0.959	80.8	0.946
	4	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.993	0.0	0.976	0.0	0.955	78.1	0.939
	5	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.992	0.0	0.975	0.0	0.953	76.8	0.935
	6	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.992	0.0	0.974	0.0	0.951	76.1	0.932
	7	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.992	0.0	0.973	0.0	0.950	75.7	0.931
	8	0~180	0.757	0~180	1.000	0.0	0.992	0.0	0.973	0.0	0.949	75.6	0.929
	∞		0.757		1.000		0.991		0.970		0.944		0.920
2.0	2	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.006	180.0	1.033	180.0	1.093	180.0	1.206
	3	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.011	180.0	1.047	180.0	1.123	180.0	1.256
	4	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.012	180.0	1.054	180.0	1.143	180.0	1.301
	5	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.013	180.0	1.059	180.0	1.154	180.0	1.323
	6	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.014	180.0	1.062	180.0	1.163	180.0	1.343
	7	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.015	180.0	1.065	180.0	1.169	180.0	1.355
	8	0~180	1.192	0~180	1.000	180.0	1.015	180.0	1.066	180.0	1.174	180.0	1.367
	∞		1.192		1.000		1.018		1.078		1.20		1.44
∞	2	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.017	180.0	1.092	180.0	1.650	180.0	1.823
	3	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.028	180.0	1.128	180.0	1.677	180.0	2.035
	4	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.032	180.0	1.151	164.0	1.724	180.0	2.271
	5	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.035	180.0	1.165	161.8	1.755	180.0	2.407
	6	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.037	180.0	1.176	161.2	1.769	180.0	2.534
	7	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.038	180.0	1.183	161.0	1.776	180.0	2.641
	8	0~180	1.475	0~180	1.000	180.0	1.039	180.0	1.189	160.8	1.781	180.0	2.736
	∞		1.475		1.000		1.046		1.228		1.82		3.4

表5 一系列円形介在物を有する無限板の母材の $S_{max}=\sigma_{max}/\sigma_0$ ($\sigma_0=\sigma_{max}|_{a/d=0}$, $a/b=1$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

E _I /E _M	a/d	0.0		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
	N	(deg.)	σ_0	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}	(deg.)	S_{max}
0.0	2	0,180	3.000	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.011	180.0	1.039	180.0	1.345
	3	(3.000)		(1.000)		(1.001)		(1.011)		(1.039)		(1.345)	
	4	0,180	3.000	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.011	180.0	1.084	180.0	1.478
	5	(3.000)		(1.000)		(1.001)		(1.011)		(1.084)		(1.478)	
	6	0,180	3.000	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.015	180.0	1.104	180.0	1.569
	7	(3.000)		(1.000)		(1.001)		(1.015)		(1.104)		(1.569)	
	8	0,180	3.000	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.019	180.0	1.119	180.0	1.627
	∞	(3.000)		(1.000)		(1.001)		(1.019)		(1.119)		(1.627)	
0.5	2	0,180	1.506	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.003	180.0	1.017	180.0	1.095
	3	(1.506)		(1.000)		(1.001)		(1.003)		(1.017)		(1.095)	
	4	0,180	1.506	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.005	180.0	1.024	180.0	1.110
	5	(1.506)		(1.000)		(1.001)		(1.005)		(1.024)		(1.110)	
	6	0,180	1.506	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.006	180.0	1.027	180.0	1.121
	7	(1.506)		(1.000)		(1.001)		(1.006)		(1.027)		(1.121)	
	8	0,180	1.506	0,180	1.000	0.0	1.001	0.0	1.007	180.0	1.029	180.0	1.125
	∞	(1.506)		(1.000)		(1.001)		(1.007)		(1.029)		(1.125)	
2.0	2	67.7 112.3	1.215	67.7 112.3	1.000	67.6	0.999	67.5	0.997	67.2	0.993	66.6	0.986
	3	(1.215)		(1.000)		(0.999)		(0.997)		(0.993)		(0.986)	
	4	67.7 112.3	1.215	67.7 112.3	1.000	67.6	0.999	67.5	0.997	67.2	0.992	66.6	0.984
	5	(1.215)		(1.000)		(0.999)		(0.997)		(0.992)		(0.984)	
	6	67.7 112.3	1.215	67.7 112.3	1.000	67.6	0.999	67.5	0.997	67.2	0.991	66.6	0.983
	7	(1.215)		(1.000)		(0.999)		(0.997)		(0.991)		(0.983)	
	8	67.7 112.3	1.215	67.7 112.3	1.000	67.6	0.999	67.5	0.996	67.1	0.991	66.6	0.983
	∞	(1.215)		(1.000)		(0.999)		(0.996)		(0.991)		(0.983)	
∞	2	67.9 112.1	1.549	67.9 112.1	1.000	68.2	1.000	68.3	1.000	113.5	1.004	68.7	0.998
	3	(1.549)		(1.000)		(1.000)		(1.001)		(1.004)		(0.998)	
	4	67.9 112.1	1.549	67.9 112.1	1.000	68.2	1.000	68.3	1.001	113.5	1.001	69.1	1.007
	5	(1.549)		(1.000)		(1.000)		(1.002)		(1.001)		(1.007)	
	6	67.9 112.1	1.549	67.9 112.1	1.000	68.2	1.000	68.3	1.002	113.5	0.999	69.5	1.019
	7	(1.549)		(1.000)		(1.000)		(1.002)		(0.999)		(1.019)	
	8	67.9 112.1	1.549	67.9 112.1	1.000	68.2	1.000	68.3	1.002	113.5	0.998	69.6	1.027
	∞	(1.549)		(1.000)		(1.000)		(1.002)		(0.998)		(1.027)	

() : Isida and Igawa [7]

表 6 一列円形介在物を有する無限板の介在物の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ ($\sigma_0 = \sigma_{\max}|_{a/d=0}$, $a/b=1$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

E _I /E _M	a/d	0.0		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
	N	(deg.)	σ_0	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$	(deg.)	$S_{\max}$
0.5	2	0~180	0.757	0~180	1.000	125.0	1.001	132.5	1.008	157.1	1.029	180.0	1.114
	3	0~180	0.757	0~180	1.000	90.0	1.003	90.0	1.014	144.0	1.041	180.0	1.135
	4	0~180	0.757	0~180	1.000	91.0	1.003	96.0	1.016	144.3	1.046	180.0	1.146
	5	0~180	0.757	0~180	1.000	90.0	1.003	90.0	1.017	142.5	1.049	180.0	1.152
	6	0~180	0.757	0~180	1.000	90.0	1.004	91.0	1.018	143.0	1.051	180.0	1.156
	7	0~180	0.757	0~180	1.000	90.0	1.004	90.0	1.018	142.9	1.052	180.0	1.159
	8	0~180	0.757	0~180	1.000	90.0	1.004	91.0	1.019	142.9	1.053	180.0	1.161
	∞		0.757		1.000		1.004		1.026		1.060		1.175
2.0	2	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.999
	3	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.998
	4	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.998
	5	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.997
	6	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.997
	7	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.997
	8	0~180	1.192	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	0.998	0.0	0.997	0.0	0.997
	∞		1.192		1.000		0.999		0.998		0.997		0.997
∞	2	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	1.000	0.0	1.005	0.0	1.110	0.0	1.057
	3	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.117	0.0	1.070
	4	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.251	0.0	1.078
	5	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.327	0.0	1.084
	6	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.356	0.0	1.088
	7	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.371	0.0	1.091
	8	0~180	1.475	0~180	1.000	0.0	0.999	0.0	1.006	0.0	1.380	0.0	1.093
	∞		1.475		1.000		0.999		1.006		1.443		1.107

表 7 $N \rightarrow \infty$ における母材の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ の推定値 ($\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

$\rho/a = (b/a)^2$	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E _I /E _M	σ_0	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$
1.0	0.0	3.000 (3.000)	1.000 (1.000)	0.961 (0.961)	0.885 (0.885)	0.831 (0.831)	0.806 (0.806)
	0.5	1.506	1.000	0.990	0.966	0.940	0.921
	2.0	1.215	1.000	1.018	1.076	1.19	1.41
	∞	1.549	1.000	1.047	1.221	1.70	3.2
0.2	0.0	1.894 (1.894)	1.000 (1.000)	0.939 (0.939)	0.810 (0.810)	0.691 (0.691)	0.608 (0.608)
	0.5	1.303	1.000	0.996	0.984	0.967	0.949
	2.0	1.390	1.000	1.009	1.040	1.109	1.269
	∞	2.228	1.000	1.040	1.145	1.421	2.420

() : Isida and Igawa [7]

1 ならば最も外側の介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に最大応力が生じることがわかる。また、紙面の都合により図示していないが、介在物の最大応力も $E_I/E_M < 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に最大応力が生じる。

図 4 は介在物の個数 $N=2 \sim 8$ に対して $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$ のときの母材に生じる最大応力の値を示した図である。この場合最大応力は、 $E_I/E_M < 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に生じる。すなわち、 x 方向の引張りとは y 方向の引張りとは最大応力の生じる位置は逆の傾向となる。このことは、介在物の最大応力についても同様である。

図 5, 6 は $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$, $E_I/E_M=0.5$ のとき $a/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ と変えたときの母材の最大応力 ($S_{j\max}$ の最大値 $S_{\max}$) と介在物の個数 N の関係を示

表 8 $N \rightarrow \infty$ における介在物の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ の推定値 ($\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

ρ/a	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E _I /E _M	σ_0	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$
1.0	0.0	—	—	—	—	—	—
	0.5	0.757	1.000	0.991	0.970	0.944	0.920
	2.0	1.192	1.000	1.018	1.078	1.20	1.44
	∞	1.475	1.000	1.046	1.228	1.82	3.4
0.2	0.0	—	—	—	—	—	—
	0.5	0.649	1.000	0.997	0.988	0.977	0.966
	2.0	1.367	1.000	1.009	1.040	1.107	1.270
	∞	2.151	1.000	1.048	1.175	1.481	4.265

した図である。また、図 6 は $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$ の場合を示している。石田らはだ円孔列を有する板の引張りにおいて、 $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$ のとき $1/N$ と $S_{\max}$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ のとき $1/(N-0.5)$ と $S_{\max}$ はほぼ直線関係となることを解析結果として示し、これを自平衡物体力の拡散特性から説明している。本解析により、このことがだ円形介在物列の場合にもほぼ成り立つことがわかる。また、その関係は介在物の最大応力についても成り立つ。

表 3, 5 は母材の、表 4, 6 は介在物の $S_{\max}$ の数値をまとめたものである。 $E_I/E_M=0$ の円孔列の場合は石田らの結果⁽⁷⁾ と本研究の結果とは表に示した範囲で完全に一致している。表 4, 6 中の最大応力の発生位置の 0~180 は介在物の全周で一樣応力状態にあることを示す。

最後に形状比 $b/a=1$ 以外の例として、形状比 $(b/a)^2 = \rho/a=0.2$ (ρ は介在物長軸端の曲率半径) の場合、介在物間の距離 a/d と弾性比 E_I/E_M を系統的に変化さ

表 9 $N \rightarrow \infty$ における母材の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ の推定値
($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1$)

p/a	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E_I/E_M	σ_0	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$
1.0	0.0	3.000 (3.000)	1.000 (1.000)	1.002 (1.002)	1.075 (1.075)	1.182 (1.182)	1.918 (1.918)
	0.5	1.506	1.000	1.001	1.010	1.037	1.133
	2.0	1.215	1.000	0.999	0.996	0.991	0.983
	∞	1.549	1.000	1.000	1.002	0.998	1.051
0.2	0.0	5.472 (5.472)	1.000 (1.000)	1.017 (1.017)	1.075 (1.075)	1.028 (1.028)	1.044 (1.044)
	0.5	1.692	1.000	1.001	1.004	1.013	1.044
	2.0	1.110	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997
	∞	1.289	1.000	0.995	0.988	0.981	0.973

() : Isida and Igawa [7]

せたときの最大応力 $S_{\max}$ の値を表 7, 8 ($\sigma_x^\infty = 1, \sigma_y^\infty = 0$) と表 9, 10 ($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1$) に $a/b = 1$ と比較して示す。 $(b/a)^2 = 0.2$ のだ円孔列の場合には石田らが解析を行っている。ここでは $N \rightarrow \infty$ の $S_{\max}$ を $N = 6, 7, 8$ からの外挿によって求めた値のみ示した。 $E_I/E_M = 0$ のだ円孔列の場合は石田らの結果⁽⁷⁾ と本研究の結果とは表に示した範囲で完全に一致している。

4. 結 言

本研究では体積方法の特異積分方程式を利用して無限板中の任意個の一系列だ円形介在物の干渉効果を厳密に解析した。得られた結果を表 3~10 にまとめたほか以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析には未知関数である体積力密度を 8 種類の基本密度関数と多項式の積で近似する方法により、母材と介在物の境界上の応力と変位に関する高い境界条件の満足度が少ない計算時間で得られた。

(2) だ円形介在物列方向の引張り ($\sigma_x^\infty = 1, \sigma_y^\infty = 0$) において母材と介在物の弾性比が $E_I/E_M < 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に最大応力が生じる。

(3) だ円形介在物列直角方向の引張り ($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1$)

表 10 $N \rightarrow \infty$ における介在物の $S_{\max} = \sigma_{\max}/\sigma_0$ の推定値
($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1$)

p/a	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E_I/E_M	σ_0	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$	$S_{\max}$
1.0	0.0	-	-	-	-	-	-
	0.5	0.757	1.000	1.004	1.026	1.060	1.175
	2.0	1.192	1.000	0.999	0.998	0.997	0.997
	∞	1.475	1.000	0.999	1.006	1.443	1.107
0.2	0.0	-	-	-	-	-	-
	0.5	0.863	1.000	1.002	1.009	1.024	1.068
	2.0	1.084	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
	∞	1.176	1.000	1.126	1.319	1.658	2.481

$= 1$) において母材と介在物の弾性比が $E_I/E_M < 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に最大応力が生じる。

(4) だ円形介在物列方向の引張り ($\sigma_x^\infty = 1, \sigma_y^\infty = 0$) の場合、最大応力 $S_{\max}$ と $1/N$ 、だ円形介在物列に直角方向の引張り ($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1$) の場合、最大応力 $S_{\max}$ と $1/(N-0.5)$ はほぼ直線関係にあることが認められ、これらの性質によって $N \rightarrow \infty$ における $S_{\max}$ の極限値を推定して示した。このような性質はだ円孔列の場合にすでに石田らが指摘しているが、本研究によって、だ円形介在物列の場合にも成り立つことが明らかとなった。

なお、本研究の一部は平成 4 年度矢崎科学技術奨励研究助成の援助を受けたことを記して深謝する。

文 献

- (1) 野田・松尾, 機論, 58-555, A(1992), 2179.
- (2) 野田・松尾, 機論, 59-559, A(1993), 785.
- (3) 野田・松尾, 機論, 59-564, A(1993), 1964.
- (4) 野田・松尾, 機論, 60-571, A(1994), 798.
- (5) 野田・松尾, 機論, 60-578, A(1994), 2411.
- (6) 野田・松尾, 機論, 60-580, A(1994), 2767.
- (7) 石田・井川, 機論, 58-553, A(1992), 1642.
- (8) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (9) 西谷, 機誌, 70-580 (1967), 627.